

Correction Devoir maison n°3

Exercice 1 - Calculs de Somme

Calculer les sommes suivantes et donner le résultat sous forme factorisée et simplifiée :

1. On calcule

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k(k-2) &= \sum_{k=0}^n k^2 - 2k \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 - 2 \sum_{k=0}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} - 1 \right) \\
 &= n(n+1) \left(\frac{2n-5}{6} \right)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}.$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n x^{2k+2} &= x^2 \sum_{k=2}^n x^{2k} \\
 &= x^2 \sum_{k=2}^n (x^2)^k \\
 &= x^2 \times x^4 \left(\frac{1 - (x^2)^{n-1}}{1 - x^2} \right) \\
 &= x^6 \left(\frac{1 - (x^{2n-2})}{1 - x^2} \right)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=2}^n x^{2k+2} = x^6 \left(\frac{1 - x^{2n-2}}{1 - x^2} \right)$$

3. A l'aide du changement de variable, $j = k - 3$, on calcule

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=4}^{n+3} (k-3)^3 &= \sum_{j=1}^n j^3 \\
 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=4}^{n+3} (k-3)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

4. En utilisant le binôme de Newton, on calcule,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \\
 &= 2 \times (2+3)^n
 \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k} = 2 \times 5^n$$

Exercice 2 - Puissances de matrices

I - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$$

ainsi que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Résolution numérique

1. Recopier et compléter le programme scilab suivant permettant de calculer le 100ème terme des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

```
//initialisation
a = ..1..
b = ..2..

// calculs
for k = 1: ..100..
    temp = ..a..
    ..a.. = 3*a + b
    b = ..-2*temp..
end

// conclusion
disp('Le 100ème terme de la suite a est" + string(..a..))
disp('Le 100ème terme de la suite b est" + string(..b..))
```

Résolution en utilisant les suites

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la première équation,

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1}$$

En utilisant la seconde équation, on obtient alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.}$$

3. On résout l'équation du second degré

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$. Les solutions de cette équation sont donc $q_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $q_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi, on a d'après la formule du cours, 2 nombres réels λ et μ tels que

$$a_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n = \lambda + \mu \times 2^n$$

On a $a_0 = 1$ (énoncé) et $a_1 = 3a_0 + b_0 = 5$. D'un autre côté, $a_0 = \lambda + \mu$ et $b_0 = \lambda + 2\mu$. On en déduit le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ 1 - \mu + 2\mu = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -3 + 4 \times 2^n.}$$

4. On a donc

$$b_n = -2 \times a_{n-1} = 6 - 2 \times 4 \times 2^{n-1}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 6 - 4 \times 2^n.}$$

Résolution en utilisant les matrices

5. On calcule le déterminant $1 \times 2 - (-2) \times (-2) = -2 \neq 0$. Ainsi, P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

6. On a

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

7. D'après le cours,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

8. — On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{A^n = PD^nP^{-1}\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $A^0 = PD^0P^{-1}$. Or, $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $A^n = PD^nP^{-1}$)

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.}$

9. On a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ -2a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On conclut

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n.}$$

10. On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{X_n = A^n X_0\}$.

Initialisation : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $X_0 = A^0 X_0$. Or, $A^0 = I_2$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $X_n = AX_0$)

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

11. On a montré que $A^n = PD^nP^{-1}$. Or

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ -2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

On conclut alors que

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & -1 + 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & -1 + 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} \\ 2 - 2^{n+1} + 4 - 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 2^n \times (2 + 2) \\ 6 - 2^n \times (2 + 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a alors

$$a_n = -3 + 4 \times 2^n.$$

et

$$b_n = 6 - 4 \times 2^n.$$

II - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on introduit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de calculer B^n pour tout entier n .

1. On a

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$B(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

B et $(B - I_3)^2$ sont non nulles. Supposons que B soit inversible. Alors

$$B(B - I_3)^2 = 0 \iff B^{-1}B(B - I_3)^2 = B^{-1}0 \iff (B - I_3)^2 = 0$$

Ce qui est absurde au vu des calculs précédents. Donc

La matrice B n'est pas inversible.

2. On a

$$C - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2I_3 - C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$C(C - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Et finalement

$$C(C - I_3)(2I_3 - C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

3. d'après la question précédente, C est inversible et

$$C^{-1} = (C - I_3)(2I_3 - C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On calcule

$$C^{-1} \times T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$C^{-1} \times T \times C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

5. — On montre les propriétés suivantes pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n : \left\{ T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_1 s'écrit $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+n+1 \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+2 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. On montre d'abord par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{B^n = C^{-1}B^nC\}$.

Initialisation : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $B^0 = C^{-1}T^0C$. Or, $B^0 = I_3$ et $C^{-1}T^0C = C^{-1}I_3C = I_3$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $B^n = C^{-1}T^nC$)

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \times B \\ &= C^{-1}T^nC \times C^{-1}TC \\ &= C^{-1}T^n \times TC \\ &= C^{-1}T^{n+1}C \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = C^{-1}T^nC$.

$$C^{-1}T^n = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1-n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, B^n = C^{-1}T^nC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2-2n & 4n-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1-n & n-2 & 3-2n \end{pmatrix}.$$